Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

для студентов специальности 220402.65.05.Д «Роботы и робототехнические системы»

Собственные значения и собственные векторы и их приложения

Кафедра математики

2010 г.

Описание работы

Настоящая курсовая работа опирается на курс линейной алгебры, в частности на теорию линейных преобразований в линейных пространствах и самостоятельное изучение теоретического материала по темам:

1. Линейное пространство.
2. Линейные преобразования и их матрицы.
3. Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы линейного преобразования.
4. Квадратичные формы.
5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

При изучении теоретического материала по этим темам следует повторить некоторые разделы курса материала первого семестра, такие, как:

- вычисление определителей;
- действия с матрицами, ранг матрицы;
- методы решения линейных систем;
- исследование линейных однородных систем.

В курсовой работе необходимо выполнить два задания:

1. Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы линейного преобразования (оператора)

Для матрицы третьего порядка требуется найти собственные значения и линейно независимые собственные векторы. Необходимо привести подробное решение со всеми объяснениями. В ответе указать не только собственные значения и соответствующие им собственные векторы, но и привести матрицу к диагональному виду, а также выписать матрицу соответствующего ортогонального преобразования.

2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Задана квадратичная форма $f=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, $(a_{ij}=a_{ji})$. Требуется составить симметричную матрицу этой квадратичной формы, определить ее собственные значения и соответствующие собственные векторы. Далее следует построить ортогональный базис, приводящий квадратичную форму к каноническому виду, получить канонический вид квадратичной формы, указать ее тип и линейное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Цель работы

Курсовая работа является первой работой студента, требующей от него освоения элементов научно-исследовательской работы. Очень важной и актуальной является задача отыскания собственных векторов некоторого линейного преобразования. Можно указать много задач из области математики, физики, механики и.т.д., которые используют этот математический аппарат. Например:

– при деформации твердого тела требуется найти такие направления, исходящие из данной точки, вдоль которых действует только растяжение или сжатие (главные направления);

– в динамике твердого тела требуется найти такие оси, проходящие через данную точку тела, относительно которых отсутствуют центробежные моменты (главные оси);

– канонический вид уравнения кривых уравнений кривых и поверхностей в некоторых случаях можно получить, только переходя к базису собственных векторов.

Общие указания по выполнению работы

1. Собственные значения и собственные векторы матрицы линейного преобразования (оператора) оператора

Линейным оператором (линейным преобразованием) $\vec{y} = \widetilde{A}\vec{x}$ в линейном пространстве называется отображение $\widetilde{A}$ этого пространства на себя, обладающее двумя свойствами:

1. $\widetilde{A}(x+y) = \widetilde{A}x + \widetilde{A}y$,

2. $\widetilde{A}(\alpha x) = \alpha\widetilde{A}x$,

где $\widetilde{A}x$ и $\widetilde{A}y$ - образы элементов (векторов) x и y, а α - вещественное число.

Если линейный оператор $\widetilde{A}$ задан в линейном векторном пространстве R^n с заданным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и элементами этого пространства являются векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, то соответствие $\vec{y} = \widetilde{A}\vec{x}$ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ можно записать в виде матричного уравнения:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x},$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного преобразования (оператора)*** $\widetilde{A}$.

Если линейное преобразование

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

с матрицей A задано в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, и это же преобразование в новом базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ имеет вид:

$$\vec{y}' = A'\vec{x}',$$

то матрица A' связана с матрицей A формулой:

$$A' = H^{-1}AH,$$

где H – матрица перехода, столбцами которой являются координаты векторов нового базиса.

Пусть квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $\widetilde{A}$ в линейном пространстве R^n. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A и оператора $\widetilde{A}$, если выполняется соотношение:

$$\widetilde{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \text{ или } A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad (1.1)$$

где λ – некоторое число, которое называется собственным значением (собственным числом) матрицы и оператора.

Векторное равенство (1.1) может быть записано в виде матричного уравнения:

$$\left(A-\lambda E\right)\cdot\vec{x}=\vec{0},$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A. или в виде линейной однородной системы:

$$\begin{cases}\left(a_{11}-\lambda\right)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+.....+a_{1n}\cdot x_n=0\\ a_{21}\cdot x_1+\left(a_{22}-\lambda\right)\cdot x_2+.....+a_{2n}\cdot x_n=0\\ ....\\ a_{n1}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+.....+\left(a_{nn}-\lambda\right)\cdot x_n=0\end{cases} \qquad (1.2)$$

Следовательно, собственный вектор $\vec{x}$ является нетривиальным (ненулевым) решением однородной системы (1.2), а собственные значения определяются из условия равенства нулю определителя этой системы:

$$\left|A-\lambda E\right|=0. \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется *характеристическим уравнением*, а многочлен вида $p\left(\lambda\right)=\left(-1\right)^n\cdot\det\left(A-\lambda\cdot E\right)$ – *характеристическим многочленом.*

Собственные значения могут оказаться вещественными различными, вещественными кратными и, наконец, среди собственных значений могут быть комплексные числа.

Свойства собственных значений и собственных векторов

1) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

2) Если матрица оператора симметричная, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i,j=1,2,...,n$, то собственные значения ее вещественные.

3) Если собственные векторы матрицы образуют базис, то в этом базисе матрица оператора имеет диагональный вид, причем ее диагональными элементами являются собственные числа.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A нужно найти все различные корни характеристического уравнения

$$\det\left|A-\lambda E\right|=0$$

и для каждого такого корня найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\left(A-\lambda E\right)\cdot X=0,$$

совокупность которых образует линейно независимую систему собственных векторов.

Каждому собственному значению λ_i соответствует хотя бы один собственный вектор, так как однородная система, определитель которой равен нулю, имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Если в линейном пространстве R^n с базисом $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ определено скалярное произведение двух векторов $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$ и $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\...\\y_n\end{pmatrix}$ соотношением

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n, \qquad (1.4)$$

и если для каждого элемента $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$ определена его норма (длина) $\|\vec{x}\|$ равенством

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\,, \quad (1.5)$$

то собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям *симметричной матрицы* будут *попарно ортогональны,* т.е. скалярные произведения любых двух таких собственных векторов будут равны нулю.

Если все собственные значения симметричной матрицы различны, то собственные векторы этой матрицы образуют *ортогональный базис.*

Если нормы векторов ортогонального базиса равны единице, то базис называется *ортонормированным.* Ортогональный базис можно нормировать, разделив каждую координату базисного вектора на его норму (длину).

Пример 1.1.

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы. Приведите матрицу к диагональному виду и укажите соответствующее ортогональное преобразование.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&3&0\\0&0&16\end{pmatrix}.$$

Решение

Собственные числа матрицы определяются из уравнения

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&0\\2&3-\lambda&0\\0&0&16-\lambda\end{vmatrix}=0\,,$$

которое можно привести к виду:

$$-\lambda(3-\lambda)(16-\lambda)-4(16-\lambda)=0\text{, или}$$

$$(16-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda-4\right)=0\,,\ (16-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)=0\,.$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1=-1, \lambda_2=4, \lambda_3=16$.

1) Собственный вектор $X^{(1)}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_1=-1$,

определяется из матричного уравнения:

$$(A-\lambda_1E)\cdot\vec{x}^{(1)}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\2x_1+4x_2\\17x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

которое соответствует линейной системе

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_1+4x_2=0\\17x_3=0\end{cases}.$$

Второе уравнение системы получается из первого умножением на 2. Поэтому одно из неизвестных x_1 или x_2 можно задать произвольно.

Положим $x_2 = C_1$, тогда $X^{(1)} = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C_1 \neq 0$.

2) При $\lambda_2 = 4$ матрица A принимает вид $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Собственный вектор $X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 4$, определяется из матричного уравнения:

$$(A - \lambda_2 E)\cdot \vec{x}^{(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 12x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое соответствует линейной системе

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 12x_3 = 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы получается из второго умножением на -2. Поэтому одно из неизвестных x_1 или x_2 можно задать произвольно.

Полагая $x_1 = C_2$, получим $X^{(2)} = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C_2 \neq 0$.

3) При $\lambda_3 = 16$ матрица A принимает вид $A = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Собственный вектор $X^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = 16$, определяется из матричного уравнения:

$$(A - \lambda_3 E)\cdot \vec{x}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -16x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 13x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое соответствует линейной системе

$$\begin{cases} -16x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 13x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = C_3 \end{cases}.$$

Следовательно, третий собственный вектор $X^{(3)} = C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C_3 \neq 0$.

Положим $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ и получим попарно ортогональные собственные векторы

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют ортогональный базис. Обратите внимание на то, что заданная матрица – симметричная. Нормируем базисные векторы, разделив каждую координату на длину вектора. Получим ортонормированный базис

$$X_n^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_n^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } X_n^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица A примет диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

а матрицей перехода является матрица, построенная на ортонормированных собственных векторах:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$p(\lambda) = -\left|A - \lambda \cdot E\right| = -\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 3),$$

а корни этого многочлена: $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 3$ – простой.

1) Подставим значение $\lambda_1 = 1$ в систему (1.2). Получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}. \qquad (1.6)$$

Этой системе соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ранг которой равен 1. Следовательно, два неизвестных можно задать произвольно (свободные неизвестные). Задавая $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, получим фундаментальную систему решений

$$X = C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно указать два линейно независимых вектора соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$, которые являются фундаментальными решениями однородной системы (1.6) при $C_1 = 1, C_2 = 0$ и при $C_1 = 0, C_2 = 1$, т.е.

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ и } X^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Эти векторы являются ортогональными, в чем легко убедиться, хотя заданная матрица не является симметричной. Полученные линейно независимые ортогональные векторы – собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Второй вектор имеет длину (норму), равную единице и, следовательно, является нормированным. Нормируем первый вектор, разделив все его координаты на длину, равную $\sqrt{2}$.

$$X_n^{(1)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}.$$

2) Найдем теперь собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$. Подставив это значение в систему (1.2), получим систему уравнений для определения координат этого вектора:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Системе (1.7) соответствует матрица: $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, ранг которой равен двум. Следовательно, существует только один собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$. Решение системы (1.7), имеет вид:

$$x_1 = -x_2, x_3 = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2\right).$$

Полагая $x_2 = -C_3$, получим $x_1 = C_3$ и $x_3 = C_3$ $x_3 = 1$, и выпишем соответствующий собственный вектор

$$X^{(3)} = C_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

и нормируем его:

$$X_n^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе собственных векторов матрица A будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода к базису собственных векторов имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.3.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0.$$

Разложив его левую часть на множители, получим уравнение

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0,$$

из которого найдем собственные значения.

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку два собственных значения оказались комплексными, то собственные векторы заданной матрицы будут векторами комплексного линейного пространства.

1) Чтобы найти координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 2$, подставим это значение в однородную линейную систему (1.2). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$$

одно из решений которой имеет вид:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1,$$

а соответствующий собственный вектор

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Подставив в (1.2) второе собственное значение $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x_1+x_2=0 \\ (\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x_2+x_3=0 \\ x_1+(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x_3=0 \end{cases}.$$

Положив $x_2=1$, получим $x_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и выпишем второй собственный вектор:

$$X^{(2)}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется третий собственный вектор: $X^{(3)}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Поскольку собственные векторы соответствуют различным собственным значениям, то они образуют базис. Собственные векторы можно нормировать, учитывая, что нормы всех трех базисных векторов равны $\sqrt{3}$. Тогда матрица H перехода к базису собственных векторов будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}-i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}+i\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}+i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}-i\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица A в базисе собственных векторов примет диагональный вид

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор n – мерного линейного пространства R^n, а $x_1, x_2,\dots,x_n$ - координаты этого вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2,\dots, \vec{e}_n$.

Квадратичной формой в пространстве R^n называется линейная функция $f(\vec{x})=f(x_1, x_2,\dots x_n)$ n переменных $x_1, x_2,\dots,x_n$, которая определяется по правилу:

$$f(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \text{, где: } a_{ij}=a_{ji}.$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ называется *матрицей квадратичной формы* в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Квадратичная форма называется **невырожденной**, если $r(A)=n$ или $\det(A)\neq 0$. Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы A.

Чтобы составить матрицу квадратичной формы, следует на ее диагонали поместить коэффициенты при квадратах переменных, а коэффициенты при произведениях различных переменных разделить пополам и эти «половинки» разместить симметрично главной диагонали.

Например, матрица квадратичной формы

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (2.1)$$

в пространстве R^2 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Если $\det(A)\neq 0$, то квадратичная форма невырожденная и ее ранг равен 2.

Вид матрицы квадратичной формы определяется базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, в котором задан вектор $\vec{x}$ и меняется при переходе к другому базису по формуле:

$$A' = H^{-1}AH,$$

где H матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, ..., \vec{e}\,'_n$.

Если в линейном пространстве введено скалярное произведение (1.4), квадратичная форма может быть записана в виде скалярного произведения:

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}), \qquad (2.3)$$

где A – матрица квадратичной формы.

Квадратичная форма вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \qquad (2.4)$$

называется *канонической*. Матрица канонической формы является диагональной.

Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы A. Поскольку матрица квадратичной формы является симметричной, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ (см. (2.1) и (2.2)), то все собственные значения вещественные, а соответствующие собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Если собственные значения различные, то соответствующие им собственные векторы образуют ортогональный базис. Этот базис нужно нормировать, разделив координаты каждого базисного вектора на его норму (длину). Тогда квадратичная форма примет канонический вид (2.4), причем коэффициентами a_{ii} будут собственные значения, т.е.

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2. \qquad (2.5)$$

Если среди собственных чисел есть одинаковые, то нужно сначала найти систему n линейно независимых собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, а затем построить ортогональный базис $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, ..., \vec{e}\,'_n$ по формулам *(процесс ортогонализации Шмидта):*

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1,\ \vec{e}\,'_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \vec{e}\,'_i,\ k = 2, 3, ..., n,\ c_i = \frac{(\vec{e}_k, \vec{e}\,'_i)}{(\vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_i)}. \qquad (2.6)$$

При решении этого задания следует указать линейное преобразование, которое приводит матрицу квадратичной формы к каноническому виду, т.е.

$$\vec{x} = H\vec{x}\,',$$

где H – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ к ортонормированному базису собственных векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$. Столбцами этой матрицы будут координаты векторов ортонормированного базиса. Такая матрица , называется *ортогональной*, а линейное преобразование с такой матрицей – *ортогональным преобразованием*.

После того, как матрица квадратичной формы приведена к каноническому виду (2.5), следует определить тип квадратичной формы.

- Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если при любых, не равных одновременно нулю, значениях переменных она принимает только положительные значения. Все собственные значения матрицы положительно определенной формы положительны.
- Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при любых, не равных одновременно нулю, значениях переменных она принимает только отрицательные значения. Все собственные значения матрицы отрицательно определенной формы отрицательны.

Если все значения переменных равны нулю одновременно, то квадратичная форма равна нулю.

- Если квадратичная форма принимает положительные значения и при этом может равняться нулю в случае не равных нулю всех значениях переменных, то она называется *неотрицательно определенной.* Все собственные значения матрицы неотрицательно определенной формы положительны или равны нулю, причем среди собственных значений хотя бы одно равно нулю.
- Если квадратичная форма принимает отрицательные значения и при этом может равняться нулю в случае не равных нулю всех значениях переменных, то она называется *неположительно определенной.* Все собственные значения матрицы неположительно определенной формы отрицательны или равны нулю, причем среди собственных значений хотя бы одно равно нулю.

Во всех остальных случаях квадратичная форма называется *неопределенной* или *знакопеременной.* Среди собственных значений знакопеременной квадратичной формы есть как положительные, так и отрицательные числа.

Пример 2.1.

Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение

Выпишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в заданном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Чтобы привести квадратичную форму к диагональному виду, нужно перейти к базису собственных векторов.

Уравнение для собственных значений

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если вычесть из третьего столбца первый, то из третьего столбца можно вынести за знак определителя множитель $\lambda + 2$. Прибавляя после этого к первой строке третью, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычислив последний определитель, получим уравнение:

$$-(\lambda+2)\big((4-\lambda)(5-\lambda)-2\big)=0 \text{ или } (\lambda+2)\left(\lambda^2-9\lambda+18\right)=0,$$

из которого определим собственные числа: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=3$.

Теперь можно найти соответствующие собственные векторы.

1) $\lambda_1=-2$. Матрица однородной системы для координат первого собственного вектора:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&7&1\\3&1&3\end{pmatrix}.$$

Линейно зависимы первая и третья строка, поэтому координаты соответствующего собственного вектора $\vec{e}_1'=\begin{pmatrix}e_{11}'\\e_{21}'\\e_{31}'\end{pmatrix}$ определяются из однородной СЛАУ:

$$\begin{cases}3e_{11}'+e_{21}'+3e_{31}'=0\\ e_{11}'+7e_{21}'+e_{31}'=0\end{cases}.$$

Выпишем ее расширенную матрицу и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{array}{ccc|c} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&3&0\\1&7&1&0\end{array}\right)\sim\begin{array}{ccc|c} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&7&1&0\\3&1&3&0\end{array}\right)(-3)\sim\begin{array}{ccc|c} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&7&1&0\\0&-20&0&0\end{array}\right):(-20)\sim$$

$$\begin{array}{ccc|c} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&7&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)(-7)\sim\begin{array}{ccc|c} e_{11}' & e_{21}' & e_{31}' & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

Полученной расширенной матрице соответствует однородная система:

$$\begin{cases}e_{11}'=-e_{31}'\\ e_{21}'=0\end{cases}.$$

полагая $e_{31}'=1$, получим первый собственный вектор $\vec{e}_1'=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Аналогично определяются собственные векторы для собственных чисел $\lambda_2=6$, $\lambda_3=3$:

$$\vec{e}_2'=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{e}_3'=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные числа различные, то собственные векторы попарно ортогональны, в чем легко убедиться.

Нормируя собственные векторы, разделив координаты каждого вектора на его норму, получим ортонормированный базис векторов $\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''$.

$$\vec{e}_1''=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \vec{e}_2''=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \vec{e}_3''=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе $\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''$ квадратичная форма имеет вид:

$$-2(\vec{x}_1'')^2 + 6(\vec{x}_2'')^2 + 3(\vec{x}_3'')^2$$

и является знакопеременной.

Ортогональное преобразование от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''$ имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_1'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2'' = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \end{cases}.$$

Столбцами матрицы этого преобразования являются нормированные собственные векторы.

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Если среди собственных чисел матрицы квадратичной формы есть равные, то среди собственных векторов, соответствующих одному собственному числу нужно выбрать необходимый набор линейно независимых векторов и провести их ортогонализацию.

Пример 2.2

Привести квадратичную форму

$$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 9$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. При $\lambda = \lambda_2 = 18$ матрица однородной СЛАУ для собственных векторов имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строка линейно зависимы с первой. Следовательно, координаты соответствующего собственного вектора $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{pmatrix}$ связаны одним уравнением

$$e_{12} + 2e_{22} + 2e_{32} = 0.$$

Решение этой системы может быть записано в виде :

$$C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

где $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ – фундаментальная система линейно независимых решений. Выбирая в качестве базисных векторов $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ эти фундаментальные решения, получим базис:

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

который не является ортогональным. Проведем ортогонализацию базиса по формулам (2.6), которые для базиса в пространстве R^3 примут вид:

$$\vec{e}_1'=\vec{e}_1,\ \vec{e}_2'=\vec{e}_2-\vec{e}_2'\cdot\frac{(\vec{e}_2,\vec{e}_1')}{(\vec{e}_1',\vec{e}_1')},\ \vec{e}_3'=\vec{e}_3-\vec{e}_2'\cdot\frac{(\vec{e}_3,\vec{e}_2')}{(\vec{e}_2',\vec{e}_2')},$$

или, в силу ортогональности $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, т.е. $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=0$:

$$\vec{e}_1'=\vec{e}_1,\ \vec{e}_2'=\vec{e}_2,\ \vec{e}_3'=\vec{e}_3-\vec{e}_2'\cdot\frac{(\vec{e}_3,\vec{e}_2')}{(\vec{e}_2',\vec{e}_2')}.$$

Тогда, поскольку $(\vec{e}_3,\vec{e}_2')=4$ и $(\vec{e}_2',\vec{e}_2')=5$, получим:

$$\vec{e}_1'=\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{e}_2'=\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_3'=\vec{e}_3-\vec{e}_2'\cdot\frac{(\vec{e}_3,\vec{e}_2')}{(\vec{e}_2',\vec{e}_2')}=\vec{e}_3-\vec{e}_2'\cdot\frac{4}{5}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{-8}{5}\\\frac{4}{5}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}.$$

Нормируем базисные векторы и сделаем ортогональное преобразование

$$\begin{cases}\vec{e}_1''=\frac{1}{3}\vec{e}_1-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2-\frac{2}{3\sqrt{5}}\vec{e}_3\\ \vec{e}_2''=\frac{2}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2-\frac{4}{3\sqrt{5}}\vec{e}_3\\ \vec{e}_3''=\frac{2}{3}\vec{e}_1+\frac{5}{3\sqrt{5}}\vec{e}_3\end{cases}.$$

В базисе $\vec{e}_1'',\vec{e}_2'',\vec{e}_3''$ квадратичная форма имеет вид

$$9(x_1'')^2+18(x_2'')^2+18(x_3'')^2$$

и является положительно определенной.

Использование инструментальных средств

В данной курсовой работе не является обязательным, но приветствуется решение предложенных задач не только аналитически, но и с использованием современных пакетов математических программ, таких, например, как MatLab.

В этом случае следует не только получить численное решение с использованием пакета MatLab или пакета Mathematica, но и сравнить и проанализировать полученные результаты.

MatLab – это пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, он работает на большинстве современных операционных систем. Основной особенностью языка MatLaB является его широкие возможности по работе с матрицами.

Студенты могут выполнять расчеты с использованием пакета MatLab в аудитории У 340. Пример использования пакета MatLab дан в «Приложении 3».

Рекомендуемая литература

1. Ануфриев И. Самоучитель MatLab 5.3/6x. СПб. БХВ-Петербург, 2004.
2. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. М. Высшая школа, 2005.
3. Н.В. Васильева, Я.Ю. Ионченкова, С.Н. Леора. Элементы линейной алгебры. СПбГМТУ-СПб.2007.
4. М.И.Володичева, В.В. Григорьев-Голубев, С.Н.Леора. Собственные векторы, Жордановы формы. Функции матриц. СПбГМТУ-СПб. 2009.
5. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М. Наука, 1980.
6. Воробьев Е.М. Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика-5». М.,Диалог-МИФИ,2005.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. Наука, 1988.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.,Наука, 1979.
9. Григорьев-Голубев В.В., Кадыров С.Г. Численные методы. Ч1. СПб. Изд. Центр СПбГМТУ,1996.
10. Фридман Г.М. Работа в компьютерной математической среде МАТЕМАТИКА. Спб. Изд. центр. СПбГМТУ,2005.
11. Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты. СПб, Питер, 2009.

Требования к выполнению курсовой работы

Отчет по курсовой работе должен содержать:

1. Титульный лист: оформляется по шаблону, представленному руководителем (см. «Приложение 1»)
2. Содержание: оформляется по стандартным типографским правилам (см. «Приложение 2»).
3. Задание для курсовой работы: и аналитическое решение с необходимым математическим аппаратом и подробными объяснениями.
4. Численное решение с помощью прикладных пмкетов (если такое проводилось) должно содержать информацию об используемом пакете математических программ и результат вычислений.
5. Сравнение результатов выполненных аналитически и численно, если проводилось численное решение.
6. Краткие выводы и заключение.
7. В заключительном разделе приводится список источников, использованных при решении поставленной задачи.

Использование инструментальных средств

Для численного решения предложенных задач можно использовать такие пакеты прикладных математических программ, как MatLab, Maple, Mathematica.

В настоящей работе, в «Приложении 3» даны решения всех разобранных аналитически задач в пакете прикладных программ MatLab, поскольку этот пакет работает на большинстве современных операционных систем и его язык дает широкие возможности при работе с матрицами.

ЗАМЕЧАНИЕ

В 20010/2011 учебном году численное решение задач с применением применение прикладных пакетов желательно, но НЕ обязательно!

Требования к оформлению работы

1. **Текст рукописи.**

Текст должен быть набран в редакторе Microsoft Word с использованием редактора формул Microsoft Equation, на одной стороне листа бумаги (формат А4, шрифт Times New Roman, кегль 11–14) со следующими параметрами страницы:

– поля страницы: верхнее 2,5 см, нижнее 3,7 см, левое 3,0 см, правое 2,0 см;

– отступ красной строки: 1,27 см;

– отступы и интервалы абзаца: слева 0 пт, перед 0 пт, справа 0 пт, после 3 пт;

– межстрочный интервал: одинарный.

2. **Нумерация страниц.**

Нумерация страниц документа и приложений, входящих в состав этого документа, должна быть сквозная.

– страницы курсовой работы нумеруют арабскими цифрами;

– титульный лист и содержание включают в общую нумерацию работы, но номера страниц на них не ставят.

– колонтитулы (нумерация страниц) расположены внизу страницы, в центреотступ от нижнего края – 2,7 см.

3. **Структура текста.**

Текст документа при необходимости разделяют на разделы и подразделы:

– разделы должны иметь порядковые номера, обозначенные арабскими цифрами без точки и начинаться с “красной строки”;

– подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точки не ставятся.

4. **Заголовки.**

Заголовки следует печатать с прописной буквы, без точки в конце, не подчеркивая. Переносы слов в заголовках не допускаются. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой. Расстояние между заголовком и текстом должно быть равно 15 мм. Расстояние между заголовками раздела и подраздела – 8 мм (3 пт). Каждый раздел текстового документа рекомендуется начинать с нового листа (страницы).

5. **Титульный лист.**

На титульном листе указывается название университета, кафедры, а также тема курсовой работы. Образец оформления титульного листа приведен в «Приложении 1».

6. **Содержание.**

Содержание помещают на первом листе. Слово “Содержание” записывают в виде заголовка с прописной буквы («Приложение 2»). Наименования, включенные в содержание, записывают строчными буквами, начиная с прописной буквы. Содержание включают в общее количество листов данного документа.

7. **Введение.**

Введение курсовой работы должно содержать оценку современного состояния решаемой задачи. Во введении должна быть освещена актуальность данной работы и ее связь с ранее изученными курсами.

8. **Заключение.**

В заключении работы должны быть кратко сформулированы основные выводы, полученные при выполнении работы.

9. **Оформление математических формул.**

– Все формулы выполняются с помощью редактора формул Microsoft Equation.(размеры – мелкий символ 12, индексы 9 и 7, крупный символ 14).

– Каждая формула записывается в отдельной строке.

– Все формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах раздела двойной нумерацией. Номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера формулы, которые разделены точкой.

– Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

– Ссылки в тексте на номер формулы дают в скобках, например, «… в формуле (2.6)».

10. Оформление списка используемой литературы.

Библиография по теме курсовой работы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.1-84, который регламентирует как порядок расположения элементов описания, так и знаки препинания между ними, см. список рекомендованной литературы.

Критерии оценки

При выставлении оценки учитывается:

– качество выполненных заданий;

– сроки выполнения задания;

– доклад при защите курсовой работы;

– ответы на заданные при защите вопросы.

Контрольные вопросы

1. Какое множество называется линейным пространством? Как называются элементы линейного пространства?
2. Какие векторы называются линейно независимыми? Линейно зависимыми?
3. Какое условие является необходимым и достаточным линейной независимости векторов?
4. Как определяется базис в линейном пространстве?
5. Что называется координатами вектора в заданном базисе?
6. Что является базисом в линейном пространстве R^n ?
7. Как определяются координаты вектора в новом базисе?
8. Как определяется размерность линейного пространства?
9. Что называется линейным преобразованием (оператором)? Матрицей линейного преобразования?
10. Как меняется матрица линейного оператора при переходе к другому базису?
11. Как определяется собственный вектор матрицы линейного оператора?
12. Из какого уравнения определяются собственные значения матрицы?
13. Что можно сказать о собственных векторах, соответствующих различным собственным числам?
14. Какая матрица имеет только вещественные собственные числа?
15. Какой базис называется ортогональным? Ортонормированным?
16. Какие векторы образуют ортонормированный базис в пространстве R^n ?
17. Какое линейное преобразование называется ортогональным?
18. Что называется квадратичной формой и как составляется ее матрица?
19. Какой вид квадратичной формы называется каноническим и в каком базисе квадратичная форма имеет канонический вид?
20. Какие существуют типы квадратичных форм?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

1. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

25. $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием, укажите ее тип и линейное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.

1. $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
2. $x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.
3. $x_1x_2 + x_2x_3$.
4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
5. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
6. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
8. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
9. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
10. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
11. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
12. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
13. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
14. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
15. $4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$.
16. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
17. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
18. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
19. $8x_1x_3 + 2x_2x_3$.
20. $x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.
21. $x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$.
22. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
23. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
24. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
25. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.
26. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_2x_3$.
27. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.
28. $-4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
29. $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
30. $x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

Приложение 1

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Кафедра математики

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Курсовая работа студента 2 курса, группы
ФИО

Научный руководитель:

Ф.и.о.

Дата "_____"_________ 2010

Санкт–Петербург, 2010

Приложение 2

СОДЕРЖАНИЕ

Приложение 3

Примеры выполнения заданий с применением пакета математических программ MatLab

Задание №1.

Пример 1.1

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

при помощи пакета математических программ MatLab.

Численное решение

Аналитическое решение этой задачи было получено в примере 1.1, собственные числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_1 = -1$, а матрица H, составленная из координат нормированных собственных векторов, имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для решения этой задачи с помощью пакета MatLab, нужно войти в эту систему, кликнув на соответствующую иконку мышью, появится строка, отмеченная символом $>>$. Это начало строки, в которой Вы можете записывать матрицу A в квадратных скобках, построчно, отделяя элементы пробелами, а строки точкой с запятой. Перед точкой с запятой и после нее пробелы можно не ставить. Итак, набрали:

```
>> A = [0  2  0;2  3  0;0  0  16]
```

После закрытой квадратной скобки нажимаем **Enter**. Тогда переменной А присвоится значение матрицы и она будет выведена на экран:

```
A =
        0  2  0
        2  3  0
        0  0  16
```

Проверьте правильность введенной матрицы и вновь нажмите **Enter**. Появится новая строка с символом $>>$, в которой Вы сможете набрать функцию **eig** – вычисляющую по заданной матрице A матрицу нормированных собственных векторов H и матрицу A в новом базисе собственных векторов, которая будет иметь диагональный вид, причем элементами главной диагонали будут собственные числа. Набираем во второй строке

$$<< [H, D] = eig(A)$$

и нажимаем **enter.** На экран выводятся матрицы H и D**.**

```
H =
        –0,8944   0,4472    0
         0,4472   0,8944    0
         0        0         1,0000
D =
        –1  0  0
         0  4  0
         0  0  16
```

Матрица D – это диагональная матрица A в базисе собственных векторов, и легко видеть, что собственные значения совпадают со значениями вычисленными аналитически.

Чтобы сравнить вычисленную матрицу H с полученным аналитически результатом, вычислим элементы матрицы $H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ приближенно. Для этого снова можно использовать пакет MatLab. Набираем в следующей пустой строке

```
>> H = [–2/sqrt(5)  1/sqrt(5)  0;1/sqrt(5)  2/sqrt(5)  0;0  0  1]
```

и снова нажимаем **Enter.** На экран выводится вычисленная матрица H.

```
H =
        –0,8944   0,4472    0
         0,4472   0,8944    0
         0        0         1,0000
```

Замечание 1

В этом примере **sqrt(*x*) –** встроенная функция, вычисляющая $\sqrt{x}$, а знак / – знак деления.

Замечание 1

Если Вы провели решение задачи с использованием пакета Matlab, то Вы можете скопировать все содержимое экрана, относящееся к Вашей задаче и вставить этот текст (вместе с командами и результатами счета) в Ваш отчет, как это проделано в настоящей работе. При этом желательно помещать программу и результаты счета на отдельном листе.

Пример 1.2

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Численное решение

Аналитическое решение было получено в примере 1.2. и матрица, составленная из координат нормированных собственных векторов, имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ или приближенно } H = \begin{pmatrix} 0,7071 & 0 & 0,5774 \\ 0,7071 & 0 & -0,5774 \\ 0 & 1 & 0,5774 \end{pmatrix}.$$

Программа (с комментариями) для вычисления собственных векторов и собственных значений, в которой используется функция *eig* с заданной матрицей A – входным аргументом и двумя выходными аргументами – матрицей собственных векторов H и диагональной матрицей собственных чисел D, имеет вид:

```
clear all
<<A=[2 -1 0
   -1 2 0
   1 -1 1];
<<[H,D] = eig(A)
%[H,D] = eig(A) produces matrices of eigenvalues (D) and eigenvectors (H)
% of matrix A, so that A*H = H*D. Matrix D is the canonical form of A--a diagonal
```

```
% matrix with A's eigenvalues on the main diagonal. Matrix V is the modal matrix--its
% columns are the eigenvectors of A
```

В этой программе матрица A вводится построчно, т.е. после введения элементов первой строки через пробелы нажимается **enter,** далее в следующей строчке вводятся через пробел элементы второй строки матрицы и после **enter** вводятся элементы третьей строки и третья строка завершается квадратной скобкой. После квадратной скобки поставлена точка с запятой, поэтому матрица A на экран не выводится.

```
clear all – очистка экрана (command window); в меню edit есть эта команда.
```

Результаты счета:

H =

0	–0.5774	0.7071
0	0.5774	0.7071
1.0000	–0.5774	0

D =

1	0	0
0	3	0
0	0	1

Сравнение результатов. Краткие выводы

Результаты, полученные аналитически и численно, совпадают с точностью до нумерации собственных чисел (нумерация собственных чисел в пакете Matlab производится автоматически).

Собственному значению $\lambda=1$ соответствуют первый и третий столбцы матрицы H, собственному значению $\lambda=3$ соответствует второй столбец этой матрицы.

Пример 1.3

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Эта задача была решена аналитически и получены результаты

$$H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}-i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}+i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}-i\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \text{или}\ H=\begin{pmatrix}0{,}5773 & -0{,}2887-0{,}5000i & -0{,}2887+0{,}5000i\\ 0{,}5773 & 0{,}5773 & 0{,}5773\\ 0{,}5773 & -0{,}2887+0{,}5000i & -0{,}2887-0{,}5000i\end{pmatrix}$$

Матрица A в базисе собственных векторов, которую обозначим через D, имеет вид:

$$D=\begin{pmatrix}2{,}0000 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5000+0{,}8660i & 0\\ 0 & 0 & 0{,}500-0{,}866i\end{pmatrix}.$$

Решение с применением пакета математических программ MatLab.

Программа:

```
clear all
<< A=[1 1 0
  0 1 1
  1 0 1]
```

```
<<[H,D] = eig(A)
```

Результаты счета:

A =

1	1	0
0	1	1
1	0	1

H =

0,2887 + 0,5000 *i*	0,2887 – 0,5000 *i*	– 0,5774
–0,5774	–0,5774	– 0,5774
0,2887 – 0,5000 *i*	0,2887 + 0,5000 *i*	–0,5774

D =

0,5000 + 0,8660 *i*	0	0
0	0,5000 – 0,8660 *i*	0
0	0	2,0000

Сравнение результатов. Краткие выводы

Результаты, полученные аналитически, совпадают с полученными выше численными результатами, с точностью до нумерации собственных чисел (нумерация собственных чисел в пакете Matlab производится автоматически).

При этом собственному значению $\lambda_1 = 2$ соответствуют третий столбцы матрицы H, собственному значению $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствует первый столбец этой матрицы, а собственному значению $\lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствует ее второй столбец.

Задание №2.

Пример 2.1

Привести квадратичную форму $f = x^2{}_1 + 5x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ к каноническому виду, указать ее тип и линейное ортогональное преобразование.

Аналитическое решение этого задания было получено в примере 2.1. Искомое ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1''} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2''} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3''} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_3} \end{cases},$$

или приближенно:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1''} = -0,7071\overrightarrow{e_1} + 0,5774\overrightarrow{e_2} + 0,4082\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2''} = -0,5774\overrightarrow{e_2} + 0,8165\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3''} = 0.7071\overrightarrow{e_1} + 0,5774\overrightarrow{e_2} + 0,4082\overrightarrow{e_3} \end{cases}.$$

В полученном ортонормированном базисе квадратичная форма имеет вид:

$$-2\left(\overrightarrow{x_1''}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{x_2''}\right)^2 + 6\left(\overrightarrow{x_3''}\right)^2.$$

Решение с применением пакета математических программ MatLab

```
<<A = [1 1 3
    1 5 1
    3 1 1]
<<[H,D] = eig(A)
```

Результаты счета:

```
A =
   1    1    3
   1    5    1
   3    1    1
H =
  –0,7071    0.5774    0,4082
  –0,0000   –0.5774    0,8165
   0,7071    0,5774    0,4082
D =
  –2,0000        0             0
      0        3,0000          0
      0          0           6,0000
```

Сравнение с аналитическим результатом. Краткие выводы

Таким образом, результаты, полученные аналитически и численно, полностью совпадают.

Пример 2.2

Привести квадратичную форму

$$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение с применением пакета математических программ MatLab

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

Программа

```
<<A = [    17    –2    –2
   –2    14    –4
   –2    –4    14]
>> [H,D] = eig(A)
H =
   0,3333   –0,2981    0,8944
   0,6667   –0,5963   –0,4472
   0,6667    0,7454    0,0000
D =
    9     0     0
    0    18     0
    0     0    18
>> H=[1/3 –2/sqrt(5) –2/3/sqrt(5);2/3 1/sqrt(5) –4/3/sqrt(5);2/3 0 5/3/sqrt(5)]
H =
   0,3333   –0,8944   –0,2981
```

0,6667	0,4472	–0,5963
0,6667	0	0,7454

Сравнение с аналитическим результатом. Краткие выводы

Результаты совпали с той лишь разницей, что собственные векторы пронумерованы в другом порядке. При этом следует заметить, что при вычислении собственных векторов с помощью функции **eig** проведена ортогонализация базиса.