Методические указания к выполнению курсовой работы

"СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ"

для студентов специальности 220402.65.05.Д «Роботы и робототехнические системы»

Кафедра математики

2010 г.

Описание работы

Курсовой проект предполагает самостоятельное изучение теоретического материала по темам «Дискретный случайный вектор», «Непрерывный случайный вектор», «Числовые характеристики случайных векторов», «Модельные функции регрессии и линии регрессии» и представление изученного материала в виде реферата.

Кроме реферата по указанным темам курсовая работа включает в себя индивидуальное задание, состоящее из двух задач на дискретный и непрерывный случайный вектор. Индивидуальное задание должно быть выполнено со всеми необходимыми пояснениями и иллюстрациями в виде рисунков, графиков и таблиц.

Порядок выполнения работы

Выполненный курсовой проект состоит из трех частей:

1) реферат по теоретическому материалу;

2) решение задачи №1 со всеми пояснениями;

3) решение задачи №2 со всеми пояснениями.

1. В первой части курсовой работы должен быть представлен реферат, в котором кратко (объем 10 – 15 страниц) даются следующие сведения из рекомендованной литературы:

1. Дискретный случайный вектор

- определение дискретного случайного вектора;
- закон совместного распределения дискретного случайного вектора;
- маргинальные законы распределения дискретного случайного вектора;
- условные законы распределения компонент дискретного случайного вектора;
- функция распределения дискретного случайного вектора;
- функции распределения компонент дискретного случайного вектора;
- независимость компонент дискретного случайного вектора;
- числовые характеристики дискретного случайного вектора: математическое ожидание, корреляционный момент, коэффициент корреляции, обобщенная дисперсия;
- условные математические ожидания (функции регрессии) дискретного случайного вектора и линии регрессии.

2. Непрерывный случайный вектор

- определение непрерывного случайного вектора;
- закон совместного распределения непрерывного случайного вектора: функция и плотность совместного распределения;
- законы распределения компонент непрерывного случайного вектора;
- условные законы распределения компонент непрерывного случайного вектора;
- независимость компонент непрерывного случайного вектора;
- числовые характеристики непрерывного случайного вектора;
- условные математические ожидания (функции регрессии) непрерывного случайного вектора и линии регрессии.

Во второй части должно быть дано решение задачи №1 на дискретный случайный вектор с необходимыми таблицами и краткими пояснениями к решению, а также построенными линиями регрессии. Проверку, являются ли независимыми компоненты дискретного случайного вектора, желательно провести всеми возможными способами.

В третьей части должна быть выполнено задание, сформулированное в задаче №2. При этом необходимо сделать рисунок области, на которой отлична от нуля плотность совместного распределения непрерывного случайного вектора, построить графики функций и плотностей распределения его компонент, по найденным функциям регрессии построить линии регрессии. Проверку, являются ли независимыми компоненты дискретного случайного вектора, желательно провести всеми возможными способами.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. ВШ, 1977.
2. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. Высшая школа, 1979.
3. Д.М.Письменный. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис, 2006.
4. В.В.Григорьев-Голубев, С.Г.Кадыров. Теория вероятностей. Ч. 3. Случайные векторы. Методические указания. ЛКИ, 1995.
5. Е.О.Балицкая, Л.А.Золотухина, Теория вероятностей в приложении к задачам судостроения. Учебное пособие. ЛКИ, 1982.
6. Н.В.Васильева, В.В.Григорьев–Голубев, С.А.Иванов, Е.А.Кротов. Теория вероятностей. Уч. Пособие, СПбГМТУ, 2010, с. 156 – 198.

Варианты заданий

Задание №1

"Дискретный случайный вектор"

Задан закон распределения двумерного дискретного случайного вектора $\{X, Y\}$.

- Найти маргинальные законы распределения его компонент X и Y.
- Построить функции распределения случайных величин X и Y.
- Найти условные законы распределения случайной величины X при условии $Y = y_j$ и найти условные законы распределения случайной величины Y при условии $X = x_i$, $i = 1,..,m$, $j = 1,...,n$.
- Выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми?
- Найти математические ожидания и дисперсии компонент случайного вектора.
- Найти корреляционный момент случайного вектора.
- Найти коэффициент корреляции случайного вектора.
- Записать корреляционную матрицу случайного вектора.
- Найти обобщенную дисперсию случайного вектора.
- Найти условные математические ожидания (функции регрессии) случайного вектора и построить линии регрессии.

1 вариант

X \ Y	–1,3	0,2	0,3	2,4
–0,3	0,2	0,02	0,1	0,08
2,1	0,15	0,35	0,06	0,04

2 вариант

Y / X	–2,5	– 1,5	0	1
0,5	0,15	0,01	0,2	0,09
2,5	0,1	0,15	0,1	0,2

3 вариант

Y / X	1,3	1,5	2,2
0,5	0,2	0,2	0,1
2,7	0,4	0,04	0,06

4 вариант

Y / X	1	2	3
–2,3	0,2	0,1	0,12
2,6	0,25	0,15	0,18

5 вариант

Y / X	1	2	3	4
1	0,2	0,02	0,1	0,08
3	0,15	0,35	0,06	0,04

6 вариант

Y / X	–2	1	3	4
0	0,15	0,01	0,2	0,09
2	0,1	0,15	0,1	0,2

7 вариант

Y / X	1	1,5	2
0,5	0,2	0,2	0,1
2	0,4	0,04	0,06

8 вариант

Y / X	0	1	2
–3	0,15	0,1	0,2
–2	0,25	0,15	0,15

9 вариант

Y / X	1	2	3	4
1	0,2	0,02	0,1	0,08
2	0,15	0,35	0,06	0,04

10 вариант

X \ Y	–2	0	1	3
–2	0,15	0,01	0,2	0,09
2	0,1	0,15	0,1	0,2

11 вариант

X \ Y	1,3	2,5	3,2
0,5	0,2	0,2	0,1
1,5	0,4	0,04	0,06

12 вариант

X \ Y	1	3
–2	0,05	0,1
0	0,3	0,2
2	0,2	0,15

13 вариант

X \ Y	0	1	2	2,5
0,5	0,2	0,02	0,1	0,08
2,5	0,15	0,35	0,06	0,04

14 вариант

Y / X	1	1,5	2	2,5
–1	0,15	0,01	0,2	0,09
1	0,1	0,15	0,1	0,2

15 вариант

Y / X	1,5	2,5	3
0,5	0,2	0,2	0,1
2,5	0,4	0,04	0,06

16 вариант

Y / X	0	2
2,3	0,2	0,1
2,6	0,25	0,15
3	0,15	0,15

17 вариант

Y / X	1	2	3
0	0,1	0,3	0,2
2	0,2	0,14	0,06

18 вариант

Y / X	1,5	2
2	0,3	0,1
2,5	0,05	0,15
3	0,2	0,2

19 вариант

Y / X	0	1	2	3
0	0,2	0,1	0,1	0,05
2	0,1	0,3	0,05	0,1

20 вариант

Y / X	–2	–1	0	1
–1	0,15	0,05	0,2	0,05
1	0,1	0,15	0,1	0,2

21 вариант

Y / X	0,5	1	1,5
0,5	0,2	0,2	0,1
1,5	0,3	0,1	0,1

22 вариант

X \ Y	1	2
–3	0,28	0,25
–2	0,2	0,05
–1	0,12	0,1

23 вариант

X \ Y	0	1	2	3
–2	0,2	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,06	0,04

24 вариант

X \ Y	1	2	3	4
1	0,15	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,15	0,1	0,2

25 вариант

X \ Y	1,3	1,5	2,2
0,5	0,25	0,2	0,1
1,5	0,3	0,05	0,1

26 вариант

X \ Y	–1	1
–2	0,25	0,1
–1	0,1	0,2
0	0,15	0,2

задание №2
«Непрерывный случайный вектор»

Двумерный непрерывный случайный вектор распределен равномерно в области D, т.е. плотность распределения случайного вектора имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} C, (x, y) \in D \\ 0, (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Найти:

- параметр C;
- плотности распределения компонент случайного вектора X и Y;
- функции распределения компонент случайного вектора X и Y;
- условные плотности $f(x/Y = y)$ и $f(y/X = x)$;
- выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y;
- числовые характеристики случайного вектора: математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции, корреляционную матрицу и обобщенную дисперсию;
- функции регрессии (условные математические ожидания) Y на X и X на Y, построить линии регрессии.

Варианты

1. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$.

2. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$.

3. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 16\}$.

4. $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 4\}$.

5. $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 1\}$.

6. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 4\}$.

7. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 2\}$.

8. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x\}$.

9. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y\le 1,\ y\ge x\}$.

10. $D=\{(x,y): x\le 1,\ y\le 1,\ x+y\ge 1\}$.

11. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\le 2-x,\ y\ge x\}$.

12. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y\le 2-x,\ y\le x\}$.

13. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x\le y\le x+1\}$.

14. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ y\le x\le y+1\}$.

15. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y-1\le x\le 1-y\}$.

16. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y-2\le x\le 2-y\}$.

17. $D=\{(x,y): y\ge -x,\ y\ge x,\ y\le 1\}$.

18. $D=\{(x,y): y\ge x,\ y\ge -x,\ y\le 2\}$.

19. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ y-1\le x\le 1\}$.

20. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ -1\le x\le 1-y\}$.

21. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 0\}$.

22. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$.

23. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$.

24. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ x\ge 0\}$.

25. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0,\ x\ge 0\}$.

Требования к оформлению работы

Курсовая работа состоит из текстовой части (реферата) и решения задач.

Текстовая часть содержит, как правило, 15 – 20 страниц рукописного (машинописного) текста и включает:

– титульный лист;

– содержание;

– введение;

– основную текстовую часть;

– заключение;

– список использованной литературы.

Правила оформление реферативной части

1. Текст рукописи должен быть набран на одной стороне листа бумаги в редакторе Microsoft Word.

– формат А4, шрифт Times New Roman, 11–14.

– поля страницы: верхнее 2,5 см, нижнее 3,7 см, левое 3,0 см, правое 2,0 см;

– отступ красной строки: 1,27 см;

– отступы и интервалы абзаца: слева 0 пт, перед 0 пт, справа 0 пт, после 3 пт;

– межстрочный интервал: одинарный.

2. Нумерация страниц

– все страницы рукописи должны быть пронумерованы от первой (титульной) страницы до сквозной нумерацией;

– титульный лист и содержание включают в общую нумерацию работы, но номера страниц на них не ставят;

– колонтитулы (нумерация страниц расположены внизу страницы в центре, отступ от нижнего края – 2,7 см.

3. Замечания.

– замечания следует помещать непосредственно после текстового или графического материала и печатать с прописной буквы с абзаца. Если замечание одно, то его не нумеруют. Несколько примечаний нумеруют по порядку арабскими цифрами.

4. Структура рукописи.

Текст документа при необходимости разделяют на разделы и подразделы:

– разделы должны иметь порядковые номера, обозначенные арабскими цифрами без точки и начинаться с “красной строки”.

– подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точки не ставятся

5. Заголовки.

Разделы и подразделы должны иметь заголовки.

– заголовки следует печатать с прописной буквы, без точки в конце, не подчеркивая;

– переносы слов в заголовках не допускаются;

– если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой;

– расстояние между заголовком и текстом должно быть равно 15 мм;

– расстояние между заголовками раздела и подраздела – 8 мм (3 пт);

– каждый раздел текстового документа рекомендуется начинать с нового листа (страницы).

6. Титульный лист курсовой работы выполняется с основной надписью по ГОСТ 2.104-68 (форма 2). На титульном листе указывается название университета, кафедры, а также тема курсовой работы. Образец оформления титульного листа приведен в «Приложении 1».

На первом листе помещают **содержание.** Слово "Содержание" записывают в виде заголовка с прописной буквы (Приложение 2). Наименования, включенные в содержание, записывают строчными буквами, начиная с прописной буквы. Содержание включают в общее количество листов данного документа.

Введение курсовой работы должно содержать оценку современного состояния решаемой задачи. Во введении должна быть освещена актуальность данной работы и ее связь с ранее изученными курсами.

Текст документа должен быть кратким, четким и не допускать различных толкований. Наименования, приводимые в тексте документа и на иллюстрациях, должны быть одинаковыми.

В заключении работы должны быть кратко сформулированы основные выводы,

Оформление математических формул

– все формулы выполняются с помощью редактора формул Microsoft Equation.(размеры – мелкий символ 12, индексы 9 и 7, крупный символ 14);

– каждая формула записывается в отдельной строке;

– все формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах раздела двойной нумерацией. Номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера формулы, которые разделены точкой.

– номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках;

– ссылки в тексте на номер формулы дают в скобках, например, «… в формуле (2.6)».

Оформление сопроводительных рисунков

– Все иллюстрации, помещенные в реферативной части, должны быть расположены так, чтобы их было удобно рассматривать. Иллюстрации располагают после первой ссылки на них. Иллюстрации, являющиеся элементами выполненного задания, помещают в приложении.

– Иллюстрации, за исключением иллюстраций приложений, следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией. Если рисунок один, то он обозначается "Рис. 1". Иллюстрации приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения, например: Рисунок 3.

– При ссылках на иллюстрации следует писать "… в соответствии с рис. 2". Иллюстрации, при необходимости, могут иметь наименование и пояснительные данные (подрисуночный текст). Слово "Рисунок" и наименование помещают после пояснительных данных и располагают следующим образом: Рис. 1 – Линии регрессии. Шрифт подрисуночной подписи Times New Roman, 9–10, форматирование по центру.

– Рисунки можно выполнять вручную или использовать любой векторный редактор, например, Microsoft Visio. Для построения рисунков можно использовать также пакеты прикладных программ: Matlab, Maple, Mathematica.

Оформление списка используемой литературы

Библиография по теме курсовой работы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.1-84, который регламентирует как порядок расположения элементов описания, так и знаки препинания между ними, например:

Литература

1. В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. ВШ, 1977, с.

2. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. Высшая школа, 1979, с.

3. Д.М.Письменный. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис, 2006, с.

Оформление таблиц

– Таблицы в текстовой части и в решении задач располагают после первой ссылки на них. Таблицы следует снабжать заголовками и нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией. Например, "Таблица 1" или "***Таблица 1.Закон распределения случайной величины*** X **"**.

– При ссылках на таблицы следует писать "… показано в табл. 2". Таблицы следует форматировать по ширине окна, каждая ячейка таблицы должна быть отформатирована по центру. Заголовок таблицы может быть расположен по центру, или по левому, или по правому краю

Порядок защиты курсовой работы

Курсовая работа подается на проверку руководителю не позднее, чем за неделю до срока защиты, который назначается в соответствии с графиком курсовой работы. Оценка по курсовой работе проставляется с учетом качества выполненной работы и ответа студента при ее защите.

В процессе защиты студент должен уметь кратко изложить основное содержание курсовой работы и ответить на вопросы, заданные руководителем.

Контрольные вопросы

1. Что называется случайным вектором? Какой случайный вектор называется дискретным? Непрерывным?
2. Что называется законом распределения случайного вектора? Как задается законом распределения двумерного дискретного случайного вектора?
3. Каким образом получить законы распределения компонент двумерного дискретного случайного вектора, зная закон его совместного распределения?
4. Что называется функцией распределения двумерного случайного вектора?
5. Какими свойствами обладает функция распределения двумерного случайного вектора?
6. По какой формуле можно вычислить вероятность попадания компонент случайного вектора в некоторый промежуток, используя функцию распределения?
7. Как определяется плотность распределения непрерывного случайного вектора?
8. Какими свойствами обладает плотность распределения непрерывного двумерного случайного вектора?
9. По каким формулам находятся функции распределения компонент двумерного дискретного случайного вектора? Непрерывного случайного вектора?
10. По каким формулам находятся плотности распределения компонент двумерного непрерывного случайного вектора?
11. Как составляются условные законы распределения компонент двумерного дискретного случайного вектора?
12. По каким формулам находятся условные плотности распределения компонент двумерного непрерывного случайного вектора?
13. Как выяснить зависимы или нет дискретные случайные величины X и Y? Непрерывные случайные величины X и Y?
14. Как определяется математическое ожидание дискретного двумерного случайного вектора? Непрерывного случайного вектора?
15. Как определяется корреляционный момент случайных величин X и Y (дискретных или непрерывных)?

16. Какими свойствами обладает корреляционный момент случайных величин X и Y?
17. Что такое коэффициент корреляции и какими свойствами он обладает?
18. Как вычисляются условные математические ожидания (функции регрессии) дискретного и непрерывного случайного вектора? Какими будут условные математические ожидания (функции регрессии), если случайные величины X и Y независимы?
19. Что называют линиями регрессии? Как называется регрессия X на Y и Y на X, если линиями регрессии являются прямые? Как выглядят о линии регрессии, если случайные величины X и Y независимы?
20. Что означает некоррелированность случайных величин X и Y? Как связаны независимость и некоррелированность двух случайных величин?

Пример выполнения индивидуального задания

Задача №1

Постановка задачи

Закон распределения дискретного двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ задан таблицей 1.

- Найти маргинальные законы распределения его компонент X и Y.
- Построить функции распределения случайных величин X и Y.
- Найти условные законы распределения случайной величины X при условии $Y = y_j$ и найти условные законы распределения случайной величины Y при условии $X = x_i$, $i = 1,..,m,\ \ j = 1,...,n$.
- Выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми?
- Найти математические ожидания и дисперсии компонент случайного вектора.
- Найти корреляционный момент случайного вектора.
- Найти коэффициент корреляции случайного вектора.
- Записать корреляционную матрицу случайного вектора.
- Найти обобщенную дисперсию случайного вектора.
- Найти условные математические ожидания (функции регрессии) случайного вектора и построить линии регрессии. Построить линии регрессии Y на X и X на Y.

Таблица 1. Закон совместного распределения случайных величин X и Y.

X \ Y	-1	0	1	Σ
0	0,2	0,1	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Σ	0,3	0,3	0,4	1

Решение

1. В последнем столбце таблицы 1 вычислены вероятности событий $\{X = x_i\}$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1, 2.$$

В последней строке таблицы 1 вычислены вероятности событий $\{Y = y_j\}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{2} p_{ij} = q_j = P\{Y = y_j\},\ j = 1, 2, 3.$$

Учитывая это, запишем маргинальные законы распределения компонент дискретного случайного вектора.

Таблица 2. Закон распределения случайной величины X.

X	0	1	Σ
$P\{X = x_i\}$	0,6	0,4	1

Таблица 3. Закон распределения случайной величины Y.

Y	–1	0	1	Σ
$P\{Y = y_j\}$	0,3	0,3	0,4	1

Последний столбец таблиц 2 и 3 помещен для контроля, в нем даны суммы вероятностей $\sum_{i=1}^{m} p_i$ и $\sum_{i=1}^{n} q_i$.

2. По полученным законам распределения случайных величин X и Y можно найти их функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}6, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}6 + 0{,}4 = 1, & x > 1, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1, \\ 0{,}3, & -1 < y \le 0, \\ 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6, & 0 < y \le 1, \\ 0{,}6 + 0{,}4 = 1, & y > 1. \end{cases}$$

Графики функций распределения даны на рисунке 1.

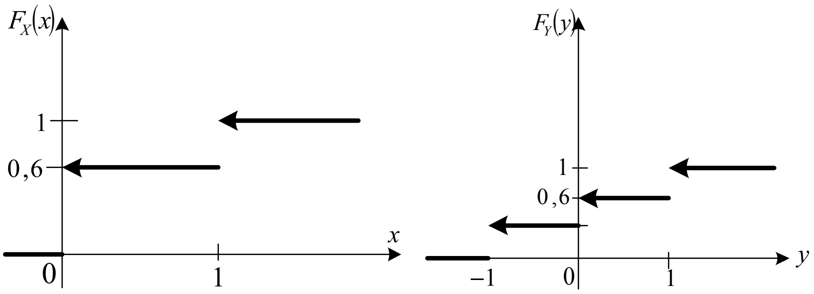

Рис. 1. Функции распределения случайных величин X и Y.

3. Условным законом распределения какой–либо компоненты случайного вектора, называется ее закон распределения, составленный при условии, что другие компоненты приняли определенные значения.

В случае двумерного дискретного случайного вектора $\{X, Y\}$ условным распределением компоненты X при условии, что $Y = y_j, (j = const)$ называется совокупность условных вероятностей

$$P\left(x_1/y_j\right), P\left(x_2/y_j\right), \ldots, P\left(x_m/y_j\right),$$

которые вычисляются по формулам

$$P\left\{X = x_i / Y = y_j\right\} = p\left(x_i/y_j\right) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{q_j}. \qquad (1.1)$$

Аналогично, условным распределением компоненты Y при условии, что $X = x_i$, $(i = const)$ называется совокупность условных вероятностей

$$P\left(y_1/x_i\right), P\left(y_2/x_i\right), \ldots, P\left(y_n/x_i\right),$$

которые вычисляются по формулам

$$P\left\{Y = y_j / X = x_i\right\} = P\left(y_j/x_i\right) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}. \qquad (1.2)$$

Согласно формулам (1.2), условные вероятности $P\left(Y = y_j / X = x_1\right)$ равны:

$$P\left(Y = y_1 / X = x_1\right) = P\left(Y = -1 / X = 0\right) = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3},$$

$$P\left(Y = y_2 / X = x_1\right) = P\left(Y = 0 / X = 0\right) = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6},$$

$$P\left(Y = y_3 / X = x_1\right) = P\left(Y = 1 / X = 0\right) = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, условные вероятности $P\left(Y = y_j / X = x_2\right)$ определяются соотношениями:

$$P\left(Y = y_1 / X = x_2\right) = P\left(Y = -1 / X = 1\right) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4},$$

$$P\left(Y = y_2 / X = x_2\right) = P\left(Y = 0 / X = 1\right) = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2},$$

$$P\left(Y = y_3 / X = x_2\right) = P\left(Y = 1 / X = 1\right) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}.$$

По вычисленным условным вероятностям можно составить условные законы распределения случайной величины Y (табл. 3).

Таблица 4. Условные законы распределения случайной величины X **.**

Y	-1	0	1	Σ
$P\left(Y = y_j / X = 0\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
$P\left(Y = y_j / X = 1\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Вычислим условные вероятности $P\left(X = x_i / Y = y_j\right)$ для $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ по формулам (1.1).

$$P\left(X = x_1 / Y = y_1\right) = P\left(X = 0 / Y = -1\right) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3},$$

$$P\left(X = x_2 / Y = y_1\right) = P\left(X = 1 / Y = -1\right) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

$$P\left(X = x_1 / Y = y_2\right) = P\left(X = 0 / Y = 0\right) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3},$$

$$P\left(X = x_2 \big/ Y = y_2\right) = P\left(X = 1 \big/ Y = 0\right) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}.$$

$$P\left(X = x_1 \big/ Y = y_3\right) = P\left(X = 0 \big/ Y = 1\right) = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4},$$

$$P\left(X = x_2 \big/ Y = y_3\right) = P\left(X = 1 \big/ Y = 1\right) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

Условные законы распределения случайной величины X даны в таблице 4.

Таблица 5. Условные законы распределения случайной величины Y **.**

X	0	1	Σ
$P\left(X = x_i \big/ Y = -1\right)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$P\left(X = x_i \big/ Y = 0\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$P\left(X = x_i \big/ Y = 1\right)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

4. Условные законы распределения не совпадают с безусловными законами, поэтому случайные величины X и Y зависимы. Убедиться в том, что случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью, можно также сравнивая закон совместного распределения случайного вектора (табл.1) с маргинальными законами (табл. 2 и табл. 3).

$$P\{X = 0, Y = -1\} = p_{11} = 0,2,$$

$$P\{X = 0\} = p_1 = 0,6, \; P\{Y = -1\} = q_1 = 0,3.$$

Следовательно, $P\{X = 0, Y = -1\} = p_{11} \neq P\{X = 0\} \cdot P\{Y = -1\} = p_1 \cdot q_1 = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$.

5. По маргинальным законам распределения случайных величин X и Y (табл. 2 и 3) найдем их математические ожидания, дисперсии и средние квадратичные отклонения, а также числовые характеристики совместного распределения, т.е. корреляционный момент и коэффициент корреляции.

а) Математические ожидания:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4.$$

$$M[Y] = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot q_j = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 = 0,1.$$

Математическим ожиданием случайного вектора является вектор

$$\{M[X]; M[Y]\} = \{0,4; 0,1\}.$$

б) Дисперсии:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot p_i - (M[X])^2 = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 - 0,16 = 0,24.$$

$$D[Y] = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \cdot q_j - (M[Y])^2 = 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 - 0,01 = 0,69.$$

в) Средние квадратичные отклонения:

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}24}\ , \quad \sigma_Y = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{0{,}69}\ .$$

г) Корреляционный момент (ковариация) и корреляционная матрица (матрица ковариаций).

Чтобы найти корреляционный момент (ковариацию) случайного вектора, необходимо вычислить математическое ожидание случайной величины XY:

$$M[XY] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij} = 0\cdot(-1)\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 1\cdot 0{,}3 + 1\cdot(-1)\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 1\cdot 0{,}1 = 0\ .$$

Тогда ковариация K_{XY}, вычисленная по формуле $K_{XY} = M[XY] - M[X]\cdot M[Y]$, равна:

$$K_{XY} = K_{YX} = 0 - 0{,}4\cdot 0{,}1 = -0{,}04\ .$$

Корреляционная матрица (матрица ковариаций) имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 & -0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}69 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы ковариаций – обобщенная дисперсия случайного вектора:

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} 0{,}24 & -0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}69 \end{vmatrix} = 0{,}24\cdot 0{,}69 - 0{,}04^2 = 0{,}164\ .$$

д) Коэффициент корреляции.

Коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y определяется формулой:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{-0{,}04}{\sqrt{0{,}24}\cdot\sqrt{0{,}69}} = -\frac{2}{3\sqrt{26}}\ .$$

6. Функции и линии регрессии.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины X при $Y = y$ называется сумма произведений возможных значений случайной величины X на соответствующие условные вероятности, т.е.

$$\mathrm{M}\left(X/_{Y=y}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i\cdot P\left(X = x_i/_{Y=y}\right). \qquad (1.3)$$

Условное математическое ожидание случайной величины X, при $Y = y$, т.е. $\mathrm{M}\left(X/_{Y=y}\right) = m_X(y)$, является функцией переменной y и называется *функцией регрессии* или *регрессией* случайной величины X на Y.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ называется сумма произведений возможных значений случайной величины Y на соответствующие условные вероятности, т.е.

$$\mathrm{M}\left(Y/_{X=x}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j\cdot P\left(Y = y_j/_{X=x}\right). \qquad (1.4)$$

Условное математическое ожидание случайной величины Y, при $X = x$, т.е. $\mathrm{M}\left(Y/_{X=x}\right) = m_Y(x)$, функцией переменной x и называется *функцией регрессии* или *регрессией* случайной величины Y на X.

Найдем регрессию $m_Y(x)$ случайной величины Y на X, используя условные законы распределения случайной величины Y (табл. 4) и формулу (1.3):

при $X=0$, $m_Y(x_1)=m_Y(0)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

при $X=1$, $m_Y(x_2)=m_Y(1)=-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=0$.

Линии регрессии принято строить ломаными, соединяющими точки $(x_i; m_Y(x_i))$ и $(y_j; m_X(y_j))$, хотя по сути – это набор таких точек. Линией регрессии Y на X будет отрезок прямой, проходящей через точки $\left(0; \frac{1}{6}\right)$ и $(1; 0)$ на плоскости с введенной системой координат $(x, m_Y(x))$. Эта линия регрессии показана на рисунке 2 а.

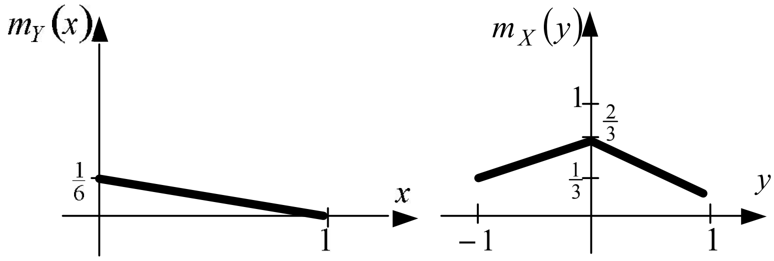

Рис. 2 а. Линия регрессии Y на X. Рис. 2 b. Линия регрессии X на Y.

При определении регрессии $m_X(y)$ случайной величины X на Y, используем условные законы распределения случайной величины X (табл. 5) и формулу (1.4):

при $Y=-1$. $m_X(y_1)=m_X(-1)=0\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

при $Y=0$, $m_X(y_2)=m_X(0)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

при $Y=1$, $m_X(y_3)=m_X(1)=0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Линией регрессии X на Y будет ломаная, проходящая через точки $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ и $\left(1; \frac{1}{4}\right)$ на плоскости с введенной системой координат $(y, m_X(y))$. Эта линия регрессии показана на рисунке 2. b.

Задача №1

Постановка задачи

Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0, & (x, y) \notin D \\ C, & (x, y) \in D \end{bmatrix},$$

где область D:

$$D = \{(x, y): -1 \le x \le 1,\ x - 1 \le y \le x + 1\}.$$

Найти:

- параметр C;
- плотности распределения компонент случайного вектора X и Y;
- функции распределения компонент случайного вектора X и Y;
- условные плотности $f(x/Y = y)$ и $f(y/X = x)$;
- выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y;
- числовые характеристики случайного вектора: математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции, корреляционную матрицу и обобщенную дисперсию;
- функции регрессии (условные математические ожидания) Y на X и X на Y, построить линии регрессии.

Решение

1. Область D показана на рисунке 3. Из свойств плотности распределения следует, что $C = \dfrac{1}{S(D)} = \dfrac{1}{4}$, где $S(D)$ - площадь области D. поскольку $S(D) = 2 \cdot 2 = 4$.

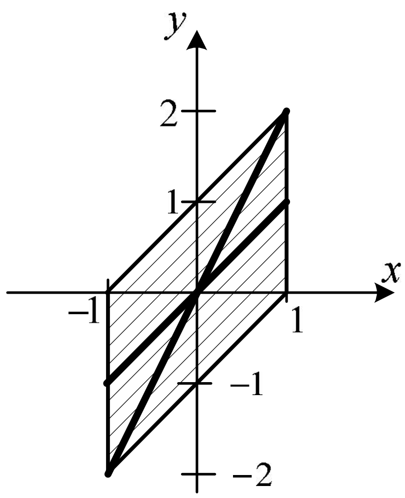

Рис. 3.

Тогда для плотности совместного распределения справедливы соотношения:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \frac{1}{4}, & (x,y)\in D\end{cases}.$$

2. Плотности распределения компонент (маргинальные или частные плотности) случайного вектора найдем, используя формулы

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \tag{2.1}$$

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{2.2}$$

а) При $x\notin[-1;1]$ $f_X(x)=0$, т.к. при этом условии $f(x,y)=0$.

При $x\in[-1;1]$

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_{x-1}^{x+1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}y\Big|_{x-1}^{x+1}=\frac{1}{4}(x+1-x+1)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1;1]$, т.е.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1;1]\\ 0, & x\notin[-1;1]\end{cases}. \tag{2.3}$$

б) При $y\notin[-2;2]$ $f_Y(y)=0$, т.к. при этом условии $f(x,y)=0$.

При $y\in[-2;0]$

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{-1}^{y+1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big|_{-1}^{y+1}=\frac{1}{4}(y+1+1)=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}.$$

При $y\in[0;2]$

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{y-1}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big|_{y-1}^{1}=\frac{1}{4}(1-y+1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}y.$$

Следовательно, плотность распределения компоненты Y имеет вид:

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-2\\ \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}, & -2\le y\le 0\\ -\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & y>2\end{cases}. \tag{2.4}$$

Графики функций $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ показаны на рисунке 4.

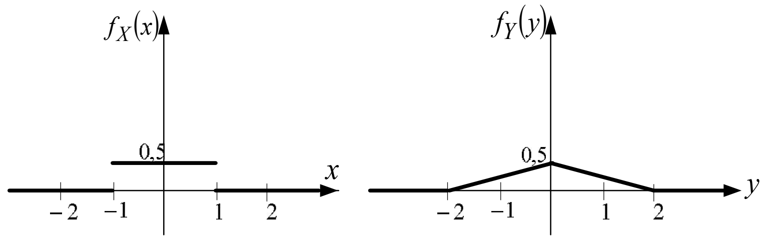

Рис. 4.

3. Функции распределения случайных величин X и Y определяются по известным плотностям формулами

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t)dt. \qquad (2.5)$$

По этим формулам, учитывая вычисленные плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ (см. (2.3) и (2.4)), получим:

$$F_X(x) = \left[\begin{array}{l} 0, \quad x < 1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{2} dt, -1 \le x \le 1 \\ 1, \quad x > 1 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 0, \quad x < -2 \\ \frac{1}{2}(x+1), -1 \le x \le 1 \\ 1, \quad x > 2 \end{array}\right.,$$

$$F_Y(y) = \left[\begin{array}{c} 0, \quad y < -2 \\ \int_{-2}^{y} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt, -2 \le y \le 0 \\ \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt + \int_{0}^{y} \left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt, 0 \le y \le 2 \\ 1, \quad y > 2 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{c} 0, \quad y < -2 \\ \left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}t\right)\Big|_{-2}^{y}, -2 \le y \le 0 \\ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}t\right)\Big|_{0}^{y}, 0 \le y \le 2 \\ 1, \quad y > 2 \end{array}\right. =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 0, \quad y < -2 \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, -2 \le y \le 0 \\ -\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, 0 \le y \le 2 \\ 1, \quad y > 2 \end{array}\right..$$

Графики функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ показаны на рис. 5.

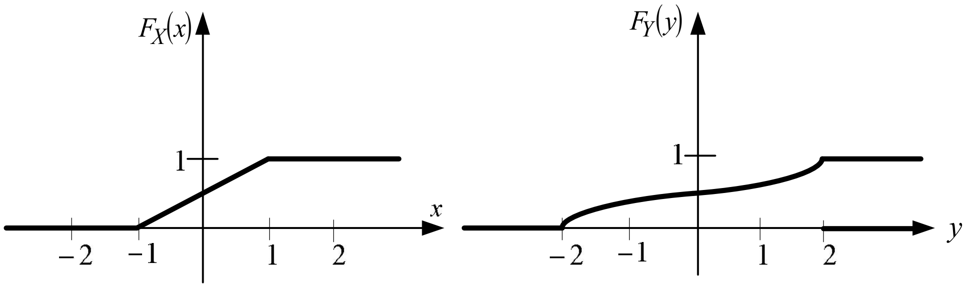

Рис. 5.

4. Условные плотности распределения $f(x/Y=y)$ и $f(y/X=x)$ определяются из соотношений:

$$f(x/Y=y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_Y(y) = 0 \\ \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) \ne 0 \end{array}\right., \qquad (2.6)$$

$$f(y/X=x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_X(x) = 0 \\ \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) \ne 0 \end{array}\right.. \qquad (2.7)$$

$$f(x/Y=y)=\begin{cases} 0, & y\le -2 \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}}, & -2<y\le 0 \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}}, & 0\le y>2 \\ 0, & y\ge 2 \end{cases}=\begin{cases} 0, & y\le -2 \\ \dfrac{1}{y+2}, & -2<y\le 0 \\ \dfrac{1}{-y+2}, & 0\le y<2 \\ 0, & y\ge 2 \end{cases} \qquad (2.8)$$

$$f(y/X=x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x\in[-1;1] \\ 0, & x\notin[-1;1] \end{cases}. \qquad (2.9)$$

5. В рассмотренном примере условные плотности распределения $f(x/Y=y)$ и $f(y/X=x)$ (2.6) и (2.7) не совпадают с безусловными плотностями $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ (2.8.) и (2.9). Это имеет место тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y зависимы.

6. Числовые характеристики случайного вектора.

а) математическое ожидание;

По вычисленным плотностям распределения $f_X(x)$ и $f_Y(x)$ компонент вектора вычислим математическое ожидание, определив математические ожидания его компонент по формулам:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx, \qquad M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy. \qquad (2.10)$$

$$M[X]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0,$$

$$M[Y]=\int_{-2}^{0} y\left(\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}\right)dy+\int_{0}^{2} y\left(-\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\tfrac{1}{4}y^2+\tfrac{1}{2}y\right)dy+\int_{0}^{2}\left(-\tfrac{1}{4}y^2+\tfrac{1}{2}y\right)dy=\left(\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(-\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{8}{12}-1-\frac{8}{12}+1=0.$$

Следовательно, математическим ожиданием случайного вектора является нулевой числовой вектор $(0;0)$.

б) Корреляционный момент (ковариация) K_{XY} вычисляется по формуле

$$K_{XY}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y], \qquad (2.11)$$

где $M[XY]$ – математическое ожидание случайной величины XY.

Поскольку $M[X]=M[Y]=0$, то вычислив

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\iint_D xydxdy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}xdx\int_{x-1}^{x+1}ydy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}xdx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-1}^{x+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x\left(x^2+2x+1-x^2+2x-1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{3},$$

найдем по формуле (2.11) ковариацию случайных величин X и Y.

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y] = \frac{1}{3}.$$

в) **Корреляционной матрицей (матрицей ковариаций)** Σ случайных величин X и Y называется симметричная квадратная матрица второго порядка, на главной диагонали которой расположены дисперсии случайных величин X и Y, а на побочной диагонали – корреляционные моменты, т.е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы ковариаций называется **обобщенной дисперсией** случайных величин X и Y, т.е.

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{vmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - K_{XY}^2 \text{ – обобщенная дисперсия.}$$

Поскольку ковариация случайных величин X и Y $K_{XY} = \frac{1}{3}$, то, вычислив дисперсии случайных величин X и Y,

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - (M[X])^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx - 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3},$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy - (M[Y])^2 = \int_{-2}^{0} y^2\left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)dy + \int_{0}^{2} y^2\left(-\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)dy - 0 =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right)dy + \int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right)dy - 0 =$$

$$= \left(\frac{y^4}{16} + \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(-\frac{y^4}{16} + \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{2} = -1 + \frac{8}{6} - 1 + \frac{8}{6} = \frac{2}{3},$$

составим матрицу ковариаций $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, определителем которой является обобщенная дисперсия, т.е. $|\Sigma| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

г) Коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \qquad (2.12)$$

где σ_X и σ_y - средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y.

Поскольку $\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sigma_Y = \sqrt{D[Y]} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, то $r_{XY} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Функции регрессии (условные математические ожидания) строятся по найденным условным плотностям распределения (2.8) и (2.9) по формулам:

$$m_X(y) = M[X/Y=y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/Y=y)dx$$ – функция регрессии X на Y;

$$m_Y(x) = M[Y/X=x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/X=x)dy$$ – функция регрессии Y на X.

Поэтому регрессия X на Y определяется соотношениями:
при $y \le -2$, $m_X(y) = 0$;
при $-2 < y \le 0$,

$$m_X(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/Y=y)dx = \int\limits_{-1}^{y+1} x \frac{1}{y+2} dx = \frac{1}{y+2} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{-1}^{y+1} = \frac{(y+1)^2 - 1}{2(y+2)} = \frac{y^2+2y}{2(y+2)} = \frac{y}{2}.$$

при $0 \le y < 2$,

$$m_X(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/Y=y)dx = \int\limits_{y-1}^{1} x \frac{1}{2-y} dx = \frac{1}{2-y} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{y-1}^{1} = \frac{1-(y-1)^2}{2(2-y)} = \frac{-y^2+2y}{2(2-y)} = \frac{y}{2}.$$

при $y \ge 2$, $m_X(y) = 0$.

Следовательно,

$$m_X(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2, \\ \frac{y}{2}, & -2 < y < 2, \\ 0. & y \ge 2. \end{cases}$$

Линия регрессии X на Y: $x = m_X(y)$ или $x = \frac{y}{2}$, при $-2 \le y \le 2$.

Определим регрессию Y на X:
при $x < -1$, $m_Y(x) = 0$;
при $-1 \le x \le 1$,

$$m_Y(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/X=x)dy = \int\limits_{x-1}^{x+1} \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{2} \frac{y^2}{2} \Bigg|_{x-1}^{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{4} = x;$$

при $x < -1$, $m_Y(x) = 0$.

Следовательно,

$$m_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x, & -1 \le x \le 1, \\ 0. & x > 1. \end{cases}$$

Линия регрессии Y на X: $y = m_Y(x)$ или $y = x$, при $-1 \le x \le 1$. Линии регрессии показаны на рис. жирными линиями. Поскольку линии регрессии являются прямыми, то регрессия линейная.

Из вида линий регрессии понятно, что случайные величины X и Y не являются независимыми, поскольку линиями регрессии независимых случайных величин являются прямые, параллельные координатным осям. В этом случае условные математические ожидания совпадали бы с безусловными математическими ожиданиями, т.е. выполнялись бы соотношения: $m_Y(x) = M[Y]$, $m_X(y) = M[X]$, а тогда линии регрессии были бы параллельны координатным осям.

Иногда оказывается, что линии линейной регрессии X на Y и Y на X совпадают. В этом случае: $|r_{XY}| = 1$, что означает, что случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.

Приложение 1

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Кафедра математики

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Курсовая работа студента 3 курса, группы
ФИО

Научный руководитель:

Ф.и.о.
Дата "_____"_________ 2009

Санкт–Петербург, 2010

Приложение 2

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ